Az általánosítás, mint a problémamegoldás része

OROSZ GYULÁNÉ

Abstract. (The generalization is as part of the problem solving) First part is an introduction. It is about György Polya's method in generally and we give some important definitions, such as problem, problem solving, the steps of the problem solving. Second part consists of a generalization of the mathematics problem. This part consists of examples connect with the generalization.

A problémamegoldás módszertanát, a tanításban és a tanárképzésben betöltött szerepét egy kíváló matematikus, Pólya György könyvei, cikkei részletesen elemzik. Pedagógiai művei a tanárképzésben is jól hasznosítható problémákat, metodikai észrevételeket, útmutatásokat tartalmaznak.

Problémának, nevezzük az olyan szituáció, kérdés, feladat felvetődését, amelyre a választ, a megoldást nem tudjuk azonnal észlelés, emlékezés, tapasztalás alapján közvetlenül megadni, hanem csak közvetet úton, gondolkodási és logikai műveletvégzéseken keresztül.

Problémamegoldáson egy kitűzött cél meghatározott feltételek mellett történő elérésére irányuló tevékenységet értjük.

A **problémamegoldás egyes fázisait** általánosítható törvényszerűségek jellemzik.

Először a szemlélődés, empírikus tevékenység oldaláról közelítjük meg a kitűzött feladatot, próbáljuk megsejteni az eredményt, találgatunk. Ezt követi a fogalmi szintre történő áttérés. Definíciókat, segédtételeket, részproblémákat fogalmazunk meg, összefüggéseket keresünk. Az elsődleges megoldást egyre finomítjuk, kiküszöböljük az esetleges hiányokat. Eredményeinket tapasztalati úton ellenőrizzük, majd a megoldást megfelelő logikai rendbe szedve megfogalmazzuk. Ezt a fogalmi szakaszt már átszövi az asszimilálás. A megoldott problémát beépítjük meglévő ismereteink rendszerébe. A megoldásnál alkalmazott módszereket gondolkodásunk egészébe illesztjük, hogy azokat újabb feladatok megoldásánál felhasználhassuk. Felvetődik az alkalmazások lehetősége, esetleg **új problémákat**, további **általánosításokat** fogalmazhatunk meg.

A tanárjelöltek képzésében az „Elemi matematika” című tárgy célja a problémamegoldás metodikájának elsajátítása, a problématervezéshez és megoldáshoz szükséges tanári készség kifejlesztése. A feldolgozásra kerülő problémaanyag tartalmaz általános és középiskolai versenyfeladatokat is. Ezen versenyfeladatok megoldása is alkotó szellemi munka, amely sok örömet okozhat tanárnak, diáknak egyaránt.

A tanulmányi versenyek feladatainak, megoldásuknak az elemzése során felvetődnek azon túlmutató kérdések. Új problémák adódnak az adatok és feltételek variálásakor, az analógiák, átfogalmazások kapcsán, az általánosításra, vagy specializálásra törekvés útján.

Az általánosítások, specializálások fejlesztik a tanárjelöltek problémalátó és problémaalkotó készségét. A tanítás során való alkalmazási lehetőségük jelentős, hiszen a specializálás számos versenyfeladat konstruálását teszi lehetővé. A versenyfeladatok általánosításai, a főiskolai tananyagból ismert mélyebb tételek, módszerek speciális esetei vezethetnek olyan elemi problémákra, amelyek középiskolai, esetenként általános iskolai ismeretek birtokában megközelíthetők.

Úgy véljük, hogy a fenti gondolatokat egy konkrét matematikai példával támaszthatjuk alá leginkább. A következőkben egy középiskolai tanulmányi versenyfeladat általánosítását fogalmazzuk meg és a megoldás gondolatmenetét ismertetjük.

Egy versenyfeladat általánosítása

Egy n $(n > 1)$ napig tartó sportversenyen m db érmet osztottak ki. Első nap 1 érem és a megmaradó érmék $\frac{1}{a}$-ad része került kiosztásra $(a > 1)$, a másodikon 2 érem, s a még fennmaradók $\frac{1}{a}$-ad része és így tovább. Végül az n-edik, azaz utolsó napon kiosztották a még visszamaradt pontosan n darab érmét. Hány napig tartott a sportverseny és hány érmét osztottak ki összesen?

Megoldás. Vizsgáljuk meg az egyes napokon megmaradó érméket. Az első nap után:

$$(m-1)\frac{a-1}{a}$$

érem maradt. A második nap után:

$$\left((m-1)\frac{a-1}{a}-2\right)\frac{a-1}{a}$$

érem maradt. A harmadik nap után:

$$\left(\left((m-1)\frac{a-1}{a}-2\right)\frac{a-1}{a}-3\right)\frac{a-1}{a}$$

érem maradt.

Az $(n-1)$-edik nap után n érem maradt. A fentiekből a következő egyenletet kapjuk:

$$\left(\left((m-1)\frac{a-1}{a}-2\right)\frac{a-1}{a}\cdots-(n-1)\right)\frac{a-1}{a}=n \tag{1}$$

Az egyenletet a következő alakba írhatjuk:

$$\begin{aligned}m\left(\frac{a-1}{a}\right)^{n-1}&-1\left(\frac{a-1}{a}\right)^{n-1}-2\left(\frac{a-1}{a}\right)^{n-2}-\\&-3\left(\frac{a-1}{a}\right)^{n-3}-\cdots-(n-1)\left(\frac{a-1}{a}\right)=n\end{aligned} \tag{2}$$

A (2) egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg $\left(\frac{a}{a-1}\right)^{n-1}$-nel

$$\begin{aligned}m-1-2&\left(\frac{a}{a-1}\right)-3\left(\frac{a}{a-1}\right)^2-\\&-\cdots-(n-1)\left(\frac{a}{a-1}\right)^{n-2}=n\left(\frac{a}{a-1}\right)^{n-1}\end{aligned} \tag{3}$$

m-re a (3)-ból a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}m=1+2&\left(\frac{a}{a-1}\right)+3\left(\frac{a}{a-1}\right)^2+\\&+\cdots+(n-1)\left(\frac{a}{a-1}\right)^{n-2}+n\left(\frac{a}{a-1}\right)^{n-1}\end{aligned} \tag{4}$$

Észrevehetjük, hogy az egyenlet jobb oldalán az

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=f(x)$$

függvény $x=\frac{a}{a-1}$ $(a>2)$ helyen vett értéke áll. Állítsuk elő $f(x)$-et egyszerűbben.

A mértani sorozat összegképletét alkalmazva:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad \text{ha} \quad x \neq 1$$

$$x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = x\frac{x^{n-1} - 1}{x - 1} = \frac{x^n - x}{x - 1}$$

$$x^2 + \cdots + x^{n-1} = x^2\frac{x^{x-2} - 1}{x - 1} = \frac{x^n - x^2}{x - 1}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x^{n-1} = x^{n-1}\frac{x - 1}{x - 1} = \frac{x^n - x^{n-1}}{x - 1}$$

Adjuk össze a fenti egyenlőségeket, a jobb oldalon a lehetséges kiemelések után kapjuk:

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{1}{x - 1}\left(nx^n - \frac{x^n - 1}{x - 1}\right)$$

A jobb oldalt tovább alakítva:

$$f(x) = \frac{1}{x - 1}\left(\frac{nx^{n+1} - nx^n - x^n + 1}{x - 1}\right) = \frac{nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1}{(x - 1)^2}$$

Behelyettesítve az $x = \frac{a}{a-1}$ értéket (4)-ből a következő adódik.

$$(5) \quad m = \frac{n\left(\frac{a}{a-1}\right)^{n+1} - (n - 1)\left(\frac{a}{a-1}\right)^n + 1}{\left(\frac{a}{a-1} - 1\right)^2} = \frac{a^n(n - a + 1)}{(a - 1)^{n-1}} + (a - 1)^2$$

Az m egész szám, ezért $\dfrac{a^n(n - a + 1)}{(a - 1)^{n-1}}$-nek is egész számnak kell lennie. Mivel a és $(a - 1)$ relatív prímek, ez csak úgy lehet, ha $\dfrac{n - (a - 1)}{(a - 1)^{n-1}}$ is egész szám. Megmutatjuk, hogy $n = a - 1$ és $m = (a - 1)^2$.

Minden $n > 1$ természetes számra és $a > 1$ rögzített természetes számra:

$$n - a < a^{n-1}$$

Teljes indukcióval bizonyítjuk állításunkat: $n = 1$, esetén $1 - a < a^0 = 1$, mert $a > 1$.

Tegyük fel, hogy $n = k$-ra $k - a < a^{k-1}$ szorozzuk a-val az egyenlőtlenség mindkét oldalát $ak - a^2 < a^{(k-1)+1} = a^k$.

Mivel $(k+1)a - a^2 < ak - a^2$, ha $k \geq 1$, ezért méginkább

$$(k+1) - a < a^{(k+1)-1}.$$

Tehát $\dfrac{n-(a-1)}{(a-1)^{n-1}}$, csak akkor lehet egész szám, ha $n = a - 1$, de ekkor viszont $m = (a-1)^2$.

Megjegyzések

Specializálással a fenti általánosított feladatra támaszkodva olyan feladatokat készíthetünk, amelyek középiskolai, illetve általános iskolai ismeretek felhasználásával megoldhatók.

1. Ha $a = 7$, akkor egy középiskolai versenyfeladatot kapunk, amelynek megoldása azonnal adódik, $n = 6$ és $m = 36$.
2. Ha $a = 9$, akkor a következő általános iskolai versenyfeladatot fogalmazhatjuk meg:

   Egy kis csapat szilvát kapott a táborban uzsonnára. A csapat vezetője úgy osztja szét a tagok között a szilvát, hogy az elsőnek ad egy szilvát és a megmaradt szilvák 9-ed részét, a másodiknak két szilvát és a megmaradt szilvák 9-ed részét, a harmadiknak három szilvát és a megmaradt szilvák 9-ed részét stb. Az utolsó részt a vezető magának tartotta meg. Csodálkozva látták a csapat tagjai, hogy mindenki egyenlően kapott a szilvából.
   Hány szilvát kapott a csoport? Hányan voltak? Hány szilvát kapott egy-egy gyerek?
3. Ha $n = 4$ és $a = 5$, akkor konstruálhatunk egy újabb elemi problémát. Egy iskola tanulói 4 napos gyalogtúrán vettek részt. Az első nap megtettek 1 km-t és a hátralévő út $\frac{1}{5}$ részét. A második nap 2 km-t és a még hátralévő út $\frac{1}{5}$ részét. A harmadik nap 3 km-t és az azután megmaradt út $\frac{1}{5}$ részét. A negyedik nap 4 km-t gyalogoltak. Hány km-t gyalogoltak a négy nap folyamán?
4. Függetlenül a jelölésektől számos hasonló feladat adódik még.
   Például: Egy ékszerész hétfőn eladta drágaköveinek felét és még 4 darabot. Kedden a maradék felét és még 2 darabot. Szerdán 5 darabot. Csütörtökön kettő híján a maradék felét. Így 8 darab drágakő maradt. Hány darab drágakő volt hétfőn reggel?

Irodalom

[1] DR. CZEGLÉDY ISTVÁN: Matematika tantárgypedagógia I. *Calibra*, Budapest, 1994.

[2] KOSZTOLÁNYI—MIKE—VINCZE: Érdekes matematikai feladatok. *Mozaik Oktatási Stúdió*, Szeged, 1992.

[3] KOSZTOLÁNYI—MIKE—POLÁNKAINÉ—SZEDERKÉNYINÉ—VINCZE: Matematika összefoglaló feladatgyűjtemény 10—14 éveseknek. *Mozaik Oktatási Stúdió*, Szeged, 1994.

[4] MOLNÁR E.: Matematikai versenysenyfeladatok gyűjteménye. *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1989.

[5] PÓLYA GYÖRGY: A problémamegoldás iskolája I—II. *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1971.

[6] PÓLYA GÖRGY: A gondolkodás iskolája. *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1970.